我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 XML
管理

< 2022年3月 >

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”

昵称： 我是8位的
园龄： 4年7个月
粉丝： 288
关注： 5
+加关注

搜索

找找看
谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

线性代数笔记31——奇异值分解

原文 | https://mp.weixin.qq.com/s/HrN8vno4obF_ey0ifCEvQw

奇异值分解（Singular value decomposition）简称SVD，是将矩阵分解为特征值和特征向量的另一种方法。奇异值分解可以将一个比较复杂的矩阵用更小更简单的几个子矩阵相乘来表示，这些小矩阵描述的都是矩阵的重要的特性。奇异值分解在图形降噪、推荐系统中都有很重要的应用。

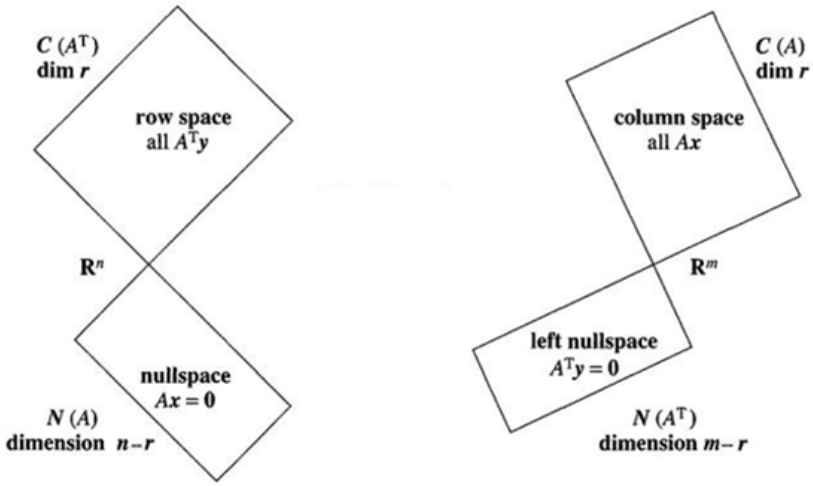
对于任意矩阵**A**，都可以奇异值分解成下面的形式，其中**U**和**V**是正交矩阵，**Σ**是对角矩阵：

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

如果**A**是正定矩阵，它的奇异值分解就是$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$，即用一个正交矩阵**Q**就可以使正定矩阵**A**进行奇异值分解，不需要两个。对于可对角化的矩阵来说，$\mathbf{A}=\mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}$，但这种形式下的特征向量矩阵**S**并不是正交矩阵，而SVD要求**U**和**V**都是正交矩阵。

奇异值分解的目标

A是m×n的矩阵，四个基本子空间的正交性可以用下图表示，其中r是矩阵的秩：



可以把矩阵**A**看作一种线性变换操作，将其行空间中的每一个向量**v**，变换为列空间的向量**u**，即**u**=**Av**。类似地，我们也可以在行空间中找到一组正交基，通过矩阵**A**线性变换成列空间中的另一组正交基：

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

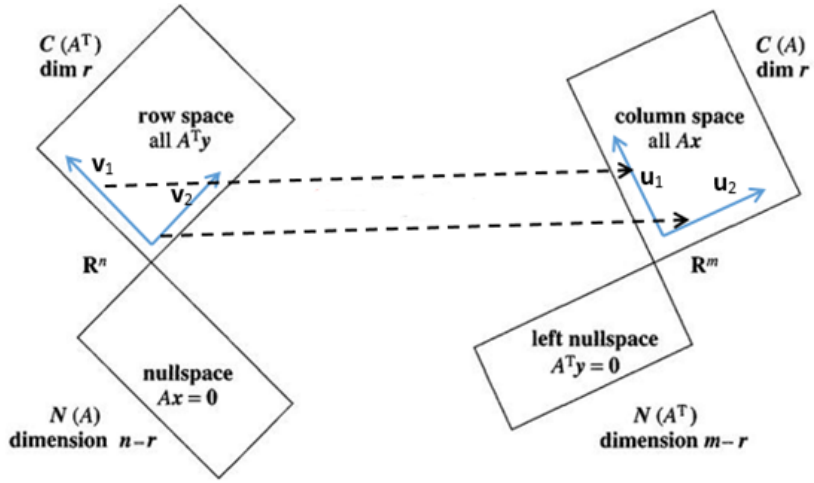
1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



行空间中的一组正交基可以通过格拉姆-施密特正交化得到——任意一组基都可以通过格拉姆-施密特正交化变成一组正交基，但是随便一组正交基经过矩阵**A**的线性变换后的向量却未必正交，因此这组满足要求的正交基非常特殊，它们需要满足：

$$A[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_r] = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_r]$$

$$AV = U$$

更进一步，在**V**中寻找标准正交向量，并使**U**中的向量标准化，从而使**U**和**V**标准正交：

$$A[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_r] = [\sigma_1 u_1 \quad \sigma_2 u_2 \quad \cdots \quad \sigma_r u_r] = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_r]\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r\end{bmatrix}$$

$$V \qquad\qquad U \qquad\qquad \Sigma$$

$$AV = U\Sigma$$

其中$\mathbf{v}_i$和$\mathbf{u}_i$都是单位向量，σ_i是$\mathbf{u}_i$的倍数，称为奇异值。上式就是奇异值分解的目标：寻找行空间的一组标准正交基，通过**A**变成列空间的一组标准正交基。

由于**V**中的向量的都是正交向量，因此$\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}$：

$$AV = U\Sigma$$

$$AVV^{\mathrm{T}} = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

这正是奇异值分解的形式。如果**A**是正定矩阵，$\mathbf{AQ}=\mathbf{Q}\Lambda$，它的奇异值分解就是$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$，此时**U**=**V**=**Q**，$\mathbf{\Sigma}=\Lambda$。

如何分解

我们已经知道奇异值分解的目标是$\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$，现在的问题是怎样找到合适的正交矩阵**U**和**V**？

考虑首先解决**U**和**V**中的一个，先将**U**消去：

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

$$A^{\mathrm{T}}A = \left(U\Sigma V^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} U\Sigma V^{\mathrm{T}} = \left(V\Sigma^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}\right)U\Sigma V^{\mathrm{T}} = V\Sigma^{\mathrm{T}}\underbrace{\left(U^{\mathrm{T}}U\right)}_{I}\Sigma V^{\mathrm{T}} = V\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

$$\Rightarrow A^{\mathrm{T}}A = V\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r^2\end{bmatrix}V^{\mathrm{T}}$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系
--trustInU

注意到$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$是一个对称方阵，并且符合正定矩阵正交分解的形式，**V**就是$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的标准化后的特征向量，σ_i^2就是$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的特征值，σ_i取特征值的正平方根。

正交向量的方向问题

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & 3\end{bmatrix}$，求**A**的奇异值分解。

目标是$\mathbf{A}=\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$，先求解**V**：

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25 & 7\\ 7 & 25\end{bmatrix}$$

计算特征值和特征向量：

$$\det\left(\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)=0\Rightarrow\lambda_1=32,\qquad\lambda_2=18\Rightarrow\sigma_1=\sqrt{32},\qquad\sigma_2=\sqrt{18}$$

$$\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{x_1}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\qquad\boldsymbol{x_2}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

将特征向量标准化：

$$\boldsymbol{v_1}=\frac{\boldsymbol{x_1}}{\|\boldsymbol{x_1}\|}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix},\qquad\boldsymbol{v_2}=\frac{\boldsymbol{x_2}}{\|\boldsymbol{x_2}\|}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix},\qquad\boldsymbol{V}^T=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

现在我们有了下面的式子：

$$\boldsymbol{AV}=\boldsymbol{U\Sigma}$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & 3\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{V}^T}=\boldsymbol{U}\underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{32} & 0\\0 & \sqrt{18}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Sigma}}$$

通过上式可以进一步求得**U**。但是我们打算用和求**V**同样的方式求得**U**：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Sigma V}^T$$
$$\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{U\Sigma V}^T\left(\boldsymbol{U\Sigma V}^T\right)^T=\boldsymbol{U\Sigma V}^T\left(\boldsymbol{V\Sigma}^T\boldsymbol{U}^T\right)=\boldsymbol{U\Sigma}\underbrace{\left(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}\right)}_{I}\boldsymbol{\Sigma}^T\boldsymbol{U}^T=\boldsymbol{U\Sigma}^T\boldsymbol{\Sigma U}^T$$
$$\Rightarrow\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r^2\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^T$$
$$\boldsymbol{AA}^T=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 0\\ 0 & 18\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

好了，现在验证一下奇异值分解的结果：

$$\boldsymbol{U\Sigma V}^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{32} & 0\\0 & \sqrt{18}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4\\3 & -3\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{A}$$

这个结果并不等于**A**。问题出在哪呢？

我们注意到，如果**U**的一个向量反向，**U**中的两个向量仍然是正交向量，且此时可以完成奇异值分解：

$$\text{if }\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix},\qquad\text{then }\boldsymbol{U\Sigma V}^T=\boldsymbol{A}$$

这是因为在奇异值分解的过程中，一旦确认了**V**中向量的方向之后，**U**中向量的方向也一起被限定了，而在本例中，我们用一种和**V**无关的方式求得了**U**，而这种方法并不一定总是有效，需要尝试改变向量的方向。通过将**V**代入**AV**=**UΣ**求得**U**，可以避免这个问题。

奇异矩阵的奇异值分解

奇异矩阵**A**也可以进行奇异值分解。 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}$，求奇异矩阵**A**的奇异值分解。

A是秩1矩阵。容易看出**A**的行空间的基是$\mathbf{v}_1$=(4, 3)，行空间是一维的，与之垂直的向量在零空间上，$\mathbf{v}_2$=(3, -4)。相应地，**A**的列空间也是一维的，它的基是$\mathbf{u}_1$=(1, 2)，与之垂直的向量在左零空间上，$\mathbf{u}_2$=(2, -1)。将上面的4个向量标准化，得到4个新的向量：

$$\boldsymbol{v_1}=\begin{bmatrix}4/5\\ 3/5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v_2}=\begin{bmatrix}3/5\\ -4/5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u_1}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u_2}=\begin{bmatrix}2/\sqrt{5}\\ -1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}\begin{bmatrix}4/5 & 3/5\\ 3/5 & -4/5\end{bmatrix}$$

接下来通过$\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$的特征向量求得**Σ**：

$$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}80 & 60\\ 60 & 45\end{bmatrix}$$

$\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$也是一个秩1矩阵，因此可确定一个特征值是0，通过矩阵的迹可确定另一个特征值是125，由此得到了**Σ**：

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sqrt{125} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{125} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4/5 & 3/5\\ 3/5 & -4/5\end{bmatrix}$$

长方矩阵的奇异值分解

长方矩阵也可以进行奇异值分解。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

虽然**A**是一个3×2的长方矩阵，但这并不影响奇异值分解。

$$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

可以看出$\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$的3个特征值是5,0,0，3个特征向量标准正交向量：

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

注意此时奇异值矩阵是3×2的矩阵，它的尺寸和**A**一致（通过$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$只能求得2个特征值）：

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

同样的方法可以求得**U**。最终：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

出处：微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号 “我是8位的”

随笔

分类: 线性代数

标签: 奇异值分解

好文要顶 关注我 收藏该文

我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
+加关注

1 推荐 0 反对

« 上一篇： 线性代数笔记30——相似矩阵和诺尔当型
» 下一篇： 线性代数笔记32——线性变换及对应矩阵

posted on 2019-12-10 18:45 我是8位的 阅读(2376) 评论(0) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告
cloud.e-iceblue.cn
JAVA Office
文档在线编辑
APIs
打开

编辑推荐：
· 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
· ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
· .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
· 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

最新新闻：
· 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
· 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
· 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
· Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
· 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
» 更多新闻...

Powered by:
博客园
Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes